4.3.1 Goniometrické rovnice I

Předpoklady: 4212, 4213, 4216, 4217

Pedagogická poznámka: Úspěšnost této hodiny zcela závisí na tom, jak rychle jsou studenti schopni hledat ke známým hodnotám goniometrických funkcí odpovídající úhly (obsah hodiny 4213). Doporučuji studenty upozornit a případně nemilosrdně trestat.

Názvosloví:

- **Goniometrické rovnice**: rovnice, ve kterých se neznámá objevuje uvnitř goniometrických funkcí.
- **Základní goniometrická rovnice**: každá rovnice zapsaná ve tvaru $g(x)=a$, kde $g(x)$ je jedna z goniometrických funkcí (sin, cos, tg, cotg), $a \in R$, $x \in R$.
- **Základní řešení základní goniometrické rovnice**: množina všech kořenů z intervalu $\langle 0;2\pi)$.

  Důvod: Opakování úhlů po 2π (trochu prázdný pojem, protože většina rovnic není základních a jejich kořeny se pak nemusejí opakovat po 2π).

Př. 1: Napiš příklad libovolné základní goniometrické rovnice a najdi její základní řešení.

Například $\sin x = 1$.

Základním řešením je $x=\frac{\pi}{2}$.

Pedagogická poznámka: Uvedená rovnice je suverénně nejčastějším návrhem. Často se vyskytují i rovnice jako $\sin x = 2$, které řešení nemají. Nejčastější chybou jsou pak zápisy typu $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, které vůbec neobsahují neznámou.

Pořádně prozkoumáme řešení rovnice $\sin x = 1$. Určitě platí $\sin\frac{\pi}{2}=1$, funkce sinus je periodická s nejmenší periodou 2π $\Rightarrow$ platí také:

- $\sin\frac{5}{2}\pi=1$, $\sin\frac{9}{2}\pi=1$, $\sin\frac{13}{2}\pi=1$, …
- $\sin-\frac{3}{2}\pi=1$, $\sin-\frac{7}{2}\pi=1$, $\sin-\frac{11}{2}\pi=1$, …

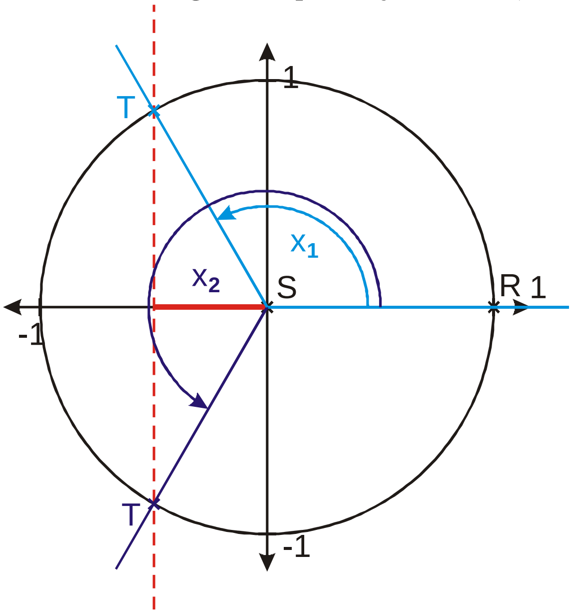
$\Rightarrow$ rovnice má nekonečně mnoho řešení (a zřejmě to bude pro goniometrické rovnice typické)
$\Rightarrow$ jak je zapíšeme?

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right\}$$

znak $\bigcup_{k\in Z}$ znamená sjednocení všech množin, které získáme tím, že do předpisu $\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right\}$ dosazujeme za *k* celá čísla.

Př. 2: Vyřeš rovnici $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Hledáme všechna $x\in R$, pro něž platí $\cos x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ to už umíme (pomocí jednotkové kružnice nebo grafu odpovídající funkce).

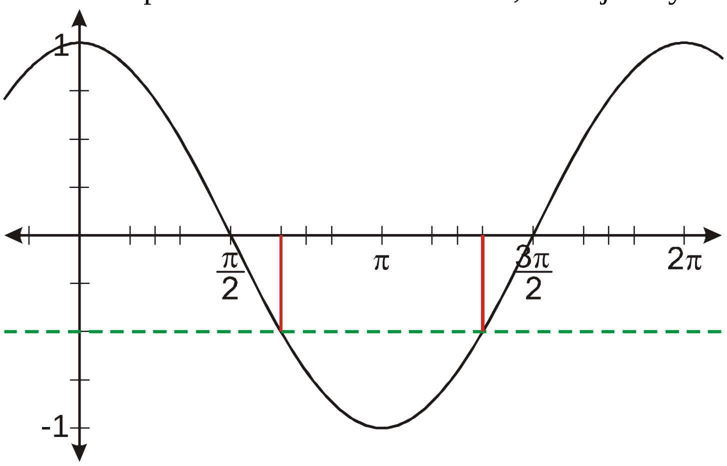


Z obrázku je vidět, že řešením jsou třetinové úhly $\frac{2}{3}\pi$ a $\frac{4}{3}\pi$.

Základní řešení : $\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Dodatek: Příklad je samozřejmě možné řešit i pomocí grafu funkce. Nechávám studenty, aby používali libovolnou metodu, která jim vyhovuje.



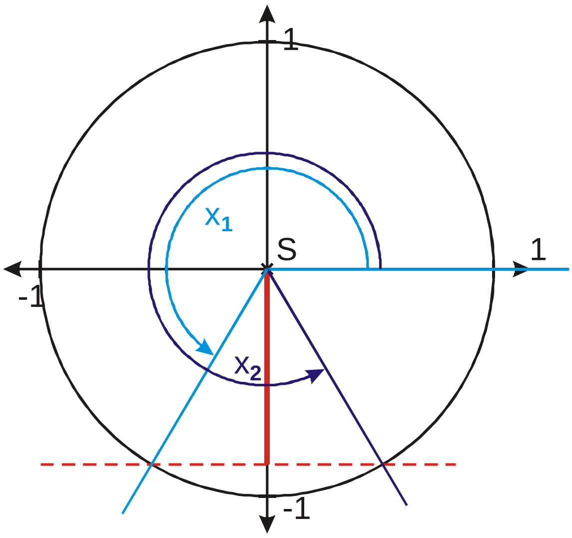
Z grafu je vidět, že řešením jsou třetinové úhly $\frac{2}{3}\pi$ a $\frac{4}{3}\pi$.

Základní řešení : $\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 3: Vyřeš rovnice: a) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

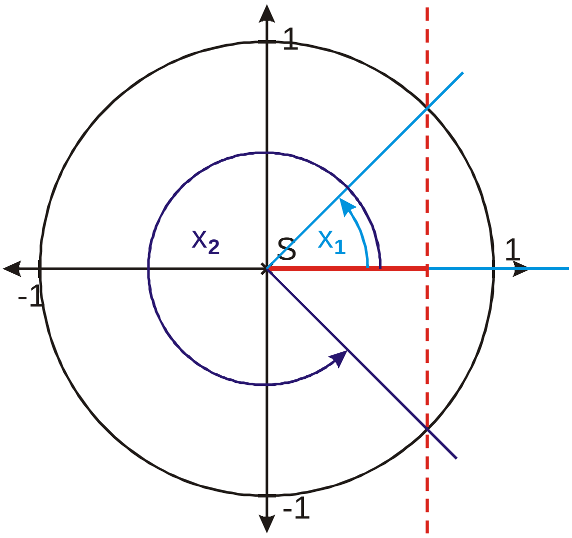
a) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



Základní řešení : $\frac{4}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi$.

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$

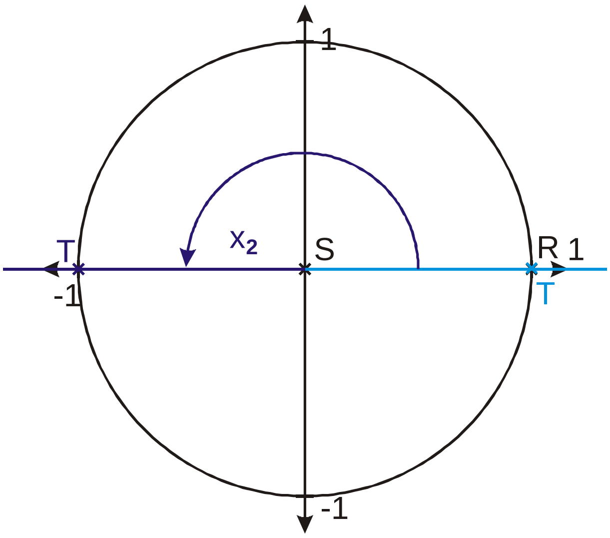
b) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$



Základní řešení : $\frac{\pi}{4};\frac{7}{4}\pi$.

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi;\frac{7}{4}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sin x=0$.



Základní řešení : $0;\pi$.

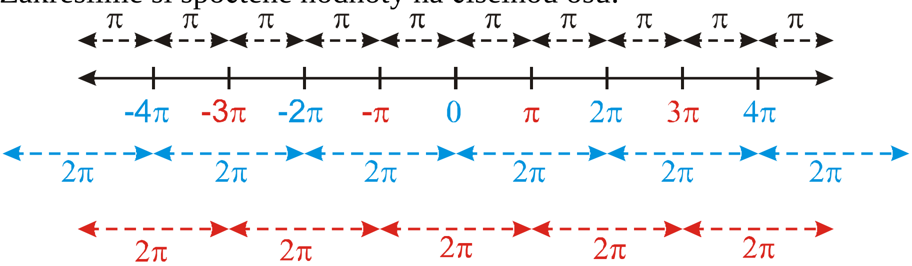
$K=\bigcup_{k\in Z}\{0+k\cdot 2\pi;\pi+k\cdot 2\pi\}$

Př. 5: Vypiš hodnoty úhlů, které jsou patří do množiny řešení z předchozího příkladu $K=\bigcup_{k\in Z}\{0+k\cdot 2\pi;\pi+k\cdot 2\pi\}$ pokud dosazujeme $k\in\{-2;-1;0;1;2\}$. Pokus se najít úspornější způsob zápisu.

Vypíšeme si hodnoty, pro každou skupinu zvlášť:

- $0+k\cdot 2\pi \;\Rightarrow\; -4\pi$, -2π, 0, 2π, 4π
- $\pi+k\cdot 2\pi \;\Rightarrow\; -3\pi$, $-\pi$, π, 3π, 5π

Zakreslíme si spočtené hodnoty na číselnou osu:

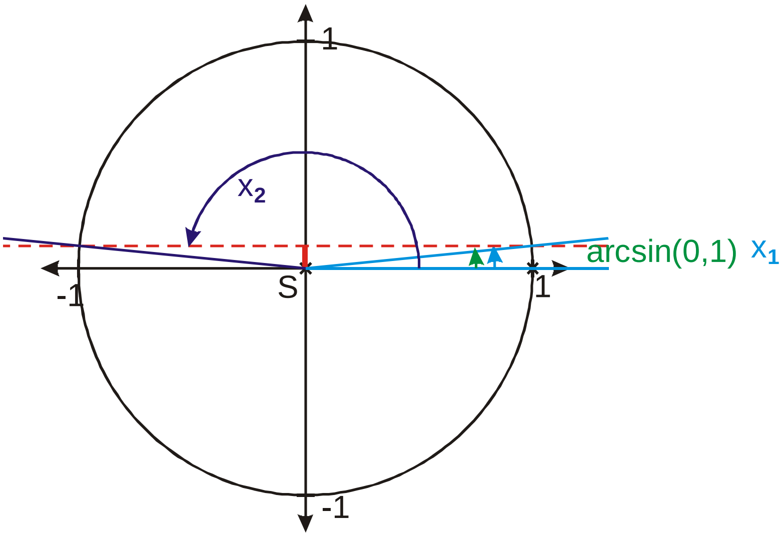


Hodnoty od obou předpisů jsou na ose rovnoměrně rozmístěny a vzdáleny o $\pi \;\Rightarrow$ úspornější zápis: $K=\bigcup_{k\in Z}\{0+k\cdot\pi\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $\sin x=0{,}1$.

0,1 není tabulková hodnota $\Rightarrow$ úhel x můžeme určit pouze přibližně nebo jako hodnotu funkce $\arcsin$. Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arcsin(0{,}1)\doteq 5°44'$

$\Rightarrow$ $\arcsin(0{,}1)$ je tedy číslo z intervalu $\langle 0;2\pi)$ a není tedy jedním základním řešením.

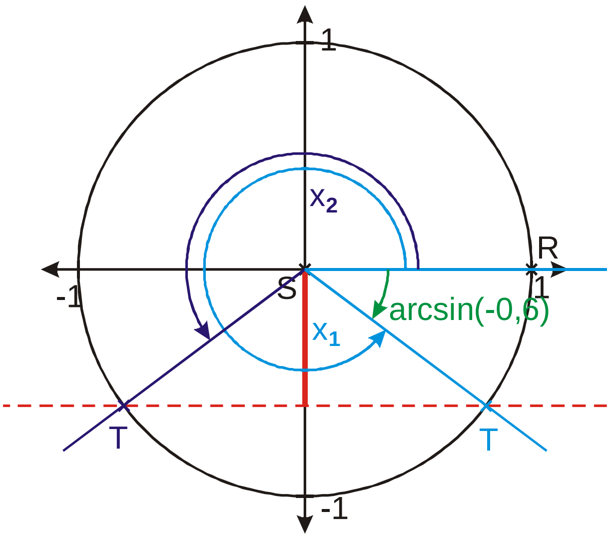


$x_1 = \arcsin(0{,}1)$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \pi - \arcsin(0{,}1)$

$K = \bigcup_{k \in Z} \{\arcsin(0{,}1) + k \cdot 2\pi; \pi - \arcsin(0{,}1) + k \cdot 2\pi\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sin x = -0{,}6$.

-0,6 není tabulková hodnota $\Rightarrow$ úhel x můžeme určit pouze přibližně nebo jako hodnotu funkce arcsin. Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arcsin(-0{,}6) \doteq -36°52'$ $\Rightarrow$ $\arcsin(-0{,}6)$ je tedy záporné číslo, které nepatří do intervalu $\langle 0; 2\pi)$ a není tedy základním řešením.



Úhly x_1 a x_2 můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

a) pomocí záporného úhlu $\arcsin(-0{,}6)$

$x_1 = 2\pi + \arcsin(-0{,}6)$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \pi - \arcsin(-0{,}6)$

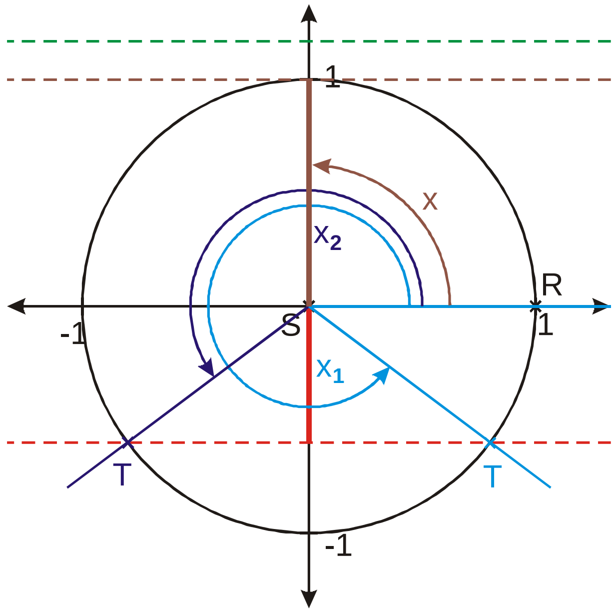
$K = \bigcup_{k \in Z} \{\pi - \arcsin(-0{,}6) + k \cdot 2\pi; 2\pi + \arcsin(-0{,}6) + k \cdot 2\pi\}$

b) pomocí kladného úhlu $\arcsin 0{,}6$

$x_1 = 2\pi - \arcsin 0{,}6$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \pi + \arcsin 0{,}6$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \{\pi + \arcsin 0{,}6 + k \cdot 2\pi; 2\pi - \arcsin 0{,}6 + k \cdot 2\pi\}$$

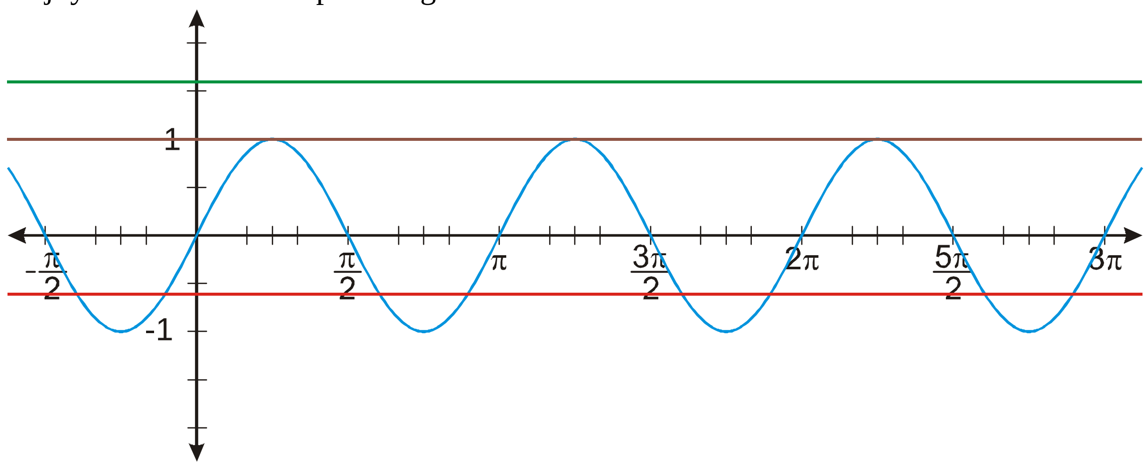
Př. 8: Urči počet základních řešení rovnice $\sin x = a$ v závislosti na hodnotě parametru $a \in R$.



Z obrázku je zřejmé, že pro:

- $a \in (-1;1)$ má rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ dvě řešení (červená čára).
- $a = \pm 1$ má rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ jedno řešení (hnědá čára).
- $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ nemá rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ žádné řešení (zelená čára).

Stejný závěr dostaneme pomocí grafu:



Př. 9: (BONUS) Najdi řešení rovnice $\sin x = a$ v závislosti na hodnotě parametru $a \in R$.

Z předchozích příkladů je zřejmé, že pro:

- $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \Rightarrow K = \emptyset$.
- $a = -1 \Rightarrow K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$.

- $a \in (-1;0) \Rightarrow K = \bigcup_{k \in Z} \{\pi - \arcsin a + k \cdot 2\pi; 2\pi + \arcsin a + k \cdot 2\pi\}$.
- $a = 0 \Rightarrow K = \bigcup_{k \in Z} \{k\pi\}$.
- $a \in (0;1) \Rightarrow K = \bigcup_{k \in Z} \{\arcsin a + k \cdot 2\pi; \pi - \arcsin a + k \cdot 2\pi\}$.
- $a = 1 \Rightarrow K = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right\}$.

V dalších příkladech (i ve všech následujících hodinách) budeme pokládat vyřešení základní goniometrické rovnice za samozřejmost a nebudeme kreslit ani kružnice ani grafy.

Př. 10: Vyřeš rovnici $\mathrm{tg}\ x = -\sqrt{3}$.

Platí: $\mathrm{tg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$, funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ je periodická s nejmenší periodou π.

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi\right\}$

Př. 11: Vyřeš rovnici $\mathrm{tg}\ x = 5$.

5 není tabulková hodnota funkce $y = \mathrm{tg}\, x$, funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ je periodická s nejmenší periodou π.

$K = \bigcup_{k \in Z} \{\mathrm{arctg}\, 5 + k \cdot \pi\}$

Shrnutí: Řešení základních goniometrických rovnic v podstatě odpovídá hledání úhlů ke známých hodnotám goniometrických funkcí.